Uitwerking

Opg. 1/ Beschouw

$$\left[\underline{a}_1\ \underline{a}_2\ \underline{a}_3 \,\middle|\, \underline{b}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 4 & -8 \\ -1 & 1 & -6 & 3\beta-7 \\ 0 & \alpha & 2+\alpha^2 & 4 \end{array}\right] \begin{matrix} +2 & +1 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 3\beta-4 \\ 0 & \alpha & 2+\alpha^2 & 4 \end{array}\right] \begin{matrix} +1\tfrac{1}{2} & +\tfrac{1}{2}\alpha \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3\beta-7 \\ 0 & 0 & \alpha^2+2\alpha+2 & 4-\alpha \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha^2+2\alpha+2 & 4-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 3\beta-7 \end{array}\right]$$

Uit dit Veegproces volgt:

a) $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ is Lineair onafhankelijk $\iff$ matrix $[\underline{a}_1\ \underline{a}_2\ \underline{a}_3]$ heeft 3 pivotposities.

Daar $\alpha^2+2\alpha+2 = (\alpha+1)^2+1 > 0$ voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ volgt nu dat $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ Lin. onafh. is voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$

b) $\underline{b} \in \text{Span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\} \iff$ het lineaire stelsel $A\underline{x} = \underline{b}$ is oplosbaar $\iff 3\beta - 7 = 0 \iff \beta = 7/3$

(N.B. Dit geldt overigens voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$, daar $\alpha^2+2\alpha+2 \neq 0$ voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$. Voor dit onderdeel mag men echter $\alpha = 0$ stellen)

Opg. 2/ a) Zij $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$, dan geldt $S(\underline{x}) = S(x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2)$

$$= x_1 S(\underline{e}_1) + x_2 S(\underline{e}_2) = x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

Eis nu: $x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\-3\end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = -3$ en $x_1 = 5$

Dus $\underline{x} = \begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$

b) $\underline{e}_1 \xrightarrow{S} \underline{e}_1 \xrightarrow{\text{Proj}} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$\underline{e}_2 \xrightarrow{S} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{proj}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

De gezochte standaardmatrix is dus:

$$\begin{bmatrix} T(\underline{e}_1) & T(\underline{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} = A$$

c) Uit standaardmatrix A (maar ook meetkundig) volgt:

$NUL(T) = \text{Span}\{\underline{e}_2\}$ en $\{\underline{e}_2\}$ is een basis van $NUL(T)$ (Los op: $A\underline{x} = \underline{0}$)

$R(T) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ en $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ is een basis van $R(T)$. (de pivotkol^n van A vormen een basis van $R(T)$.

Opg. 3/ $X^T B^{-1} = I_n + A \Leftrightarrow (X^T B^{-1})B = (I_n + A)B$

$\Leftrightarrow X^T(B^{-1}B) = B + AB \Leftrightarrow X^T I_n = B + AB$

$\Leftrightarrow X^T = B + AB \Leftrightarrow X = (B + AB)^T \Leftrightarrow$

$X = B^T + (AB)^T = B^T + B^T A^T$

Opg. 4/ $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ dus $B = -\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Nu volgt: $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} \Rightarrow A^{-1} = B(AB)^{-1}$

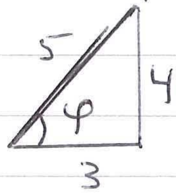
$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

Opg 5/ a> Juist,

want de rotatie om (0,0) over φ radialen (counterclockwise) wordt gerepresenteerd door $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$.

Neem nu hoek φ als volgt :



Dan geldt $\cos\varphi = 0,6$; $\sin\varphi = 0,8$ en dan is dus C de bijbehorende rotatie-matrix $\boxtimes$

b> Juist,
want stel dat zo'n matrix F bestaat dan moet gelden :

$$F\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \text{ en } F\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix};$$

immers elke kolom van $\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}$ ontstaat als produkt van F en de corresponderende kolom van $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$.

Maar $F\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ kan uiteraard niet twee verschillende vectoren opleveren, dus zo'n matrix F bestaat niet. $\boxtimes$